Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
TD3

Pr. H. EL AMRI

Exercice 0.0.1. *On considère les matrices suivantes :*
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.
Quels produits sont possibles ? les calculer.

Exercice 0.0.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *Calculer* A^2, B^2, AB *et* BA.

Exercice 0.0.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

1. *Calculer* A^p, B^p *pour tout entier naturel* p.
2. *Montrer que* $AB = BA$
3. *Calculer* $(A+B)^p$

$$A = 2I$$

Exercice 0.0.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *On pose* $N = A - I$

1. *Calculer* N^2, N^3 *et* N^4
2. *Calculer* A^p *pour tout entier* p.

Solution

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.0.5. *Soit* A *une matrice nilpotente d'indice* p *(ie* $A^p = 0$*). Calculer* $(I-A)(I+A+A^2+...+A^{p-1}$ *et* $(I+A+A^2+...+A^{p-1}(I-A)$ *Conclure.*

Exercice 0.0.6. *On pose* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$.

1. *Calculer* $A^2, A^3, ..., A^p$
2. *Calculer* $B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p$
3. *Écrire* B_n *sous la forme*
   $B_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$,
4. *Calculer* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} \gamma_n$